30/3/2017

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Cauchy-Riemann $f = u + iv$ ολόμορφη $\Leftrightarrow u_x = v_y$ &

$u_y = -v_x$

Πχ. $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$

1) $u_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $u_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$u_{yy} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ $\Delta u = 0$, Άρα η u αρμονική.

Άρα στο 1ο βήμα εξετάζω εάν είναι αρμονική

2) $v_y = u_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow u(x,y) = \int \frac{2x}{x^2+y^2} dy + \phi(x)$

$= 2 \int \frac{d\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \phi(x)$

$\Rightarrow v(x,y) = 2\,\text{τοξεφ}\frac{y}{x} + \varphi(x)$

$v_x(x,y) = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)'_x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \varphi'(x) = 2\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \varphi'(x)$

$= 2 \cdot \frac{-y}{x^2+y^2} + \varphi'(x) = -u_y(x,y) = \frac{-2y}{x^2+y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi = c \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(z) = \log(x^2+y^2) + i\left(2\,\text{τοξεφ}\frac{y}{x} + c\right)$

Ολόμορφη σε όλα τα μιγαδικά χωρίς το μηδέν (το εξαιρούμε) λόγω του πολ

Αν u το πραγματικό μέρος της ολόμορφης συνάρτησης

1) $\Delta u = 0$, $u_x(x,y) = g'(x,y)\cdot y$,

$u_{xx} = g''(x,y)y^2$, λόγω συμμετρίας: $u_{yy} = g''(x\cdot y)\cdot x^2$

πρέπει $u_{yy} + u_{xx} = 0 \Rightarrow \cancel{g''}\, g''\cdot(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow$

$\boxed{g''=0} \Rightarrow g(t) = \lambda t + \mu,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ | $v_y = u_x = \lambda y \Rightarrow v(x,y) = \lambda\frac{y^2}{2} + \phi(x)$

$v_x = \phi'(x) = -u_y = -\lambda x \Rightarrow \phi'(x) = -\lambda x$

$\Rightarrow \boxed{\phi(x) = -\frac{\lambda x^2}{2} + k,}\ k\in\mathbb{R}$

Άρα $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \lambda xy + \mu + i\left(\lambda\frac{y^2}{2} - \lambda\frac{x^2}{2} + k\right)$

$= \lambda xy + \mu + i\frac{\lambda}{2}(y^2 - x^2) + ik$

$= g(z,\cancel{\bar z})$

Δεν θα έχει το $\bar z$ μεβαιότατα η f είναι ολόμορφη σε όλο το Π.Ο. και ξέρω ότι στις ολόμορφες ισχύει $\frac{df}{d\bar z} = 0$. Άρα δεν εξαρτάται από το $\bar z$.

Ακολουθίες-Σειρές Μιγαδικών Συναρτήσεων:

$f: \mathbb{N} \to \mathcal{F}(\mathbb{C})$ $f_1, f_2, \ldots, f_\nu : Z \to \mathbb{C}$

$f_1(z_0), f_2(z_0), \ldots, f_\nu(z_0)$

(a_ν): $a_\nu \to \ell \in \mathbb{C}$: $(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow |a_\nu - \ell| < \epsilon$

$z_0 \in \mathbb{C}$: $(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow |f_\nu(z_0) - \ell| < \epsilon$. $f_\nu(z_0) \to \ell$

Αν αλλάξω το z_0 μπορεί να αλλάξει το ℓ.

$\boxed{\ell_{z_0} = f(z_0)}$ $\to \nu_0(z_0, \epsilon)$

$(\forall z_0 \in Z)(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow |f_\nu(z_0) - f(z_0)| < \epsilon$

$f_\nu \xrightarrow{\text{σημειο}} f$. (συγκλινει κατα σημειο)

Π.χ $f_\nu(z) = z^\nu$, $|z| < 1$

Θελω να δ.ο. $|z^\nu| \to 0$

$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow |z^\nu| < \epsilon \Rightarrow |z|^\nu < \epsilon$

$\Rightarrow \nu \cdot \log|z| < \log \epsilon \Rightarrow \nu > \dfrac{\log \epsilon}{\log|z|}$

$\epsilon < 1$ $\quad$ $|z| < 1$ αρα $\log|z| < 0$

Αρα για $\nu \geq \nu_0 = \left[\dfrac{\log \epsilon}{\log|z|}\right] + 1$ και $\epsilon < 1$

για να είναι το $\log \epsilon < 0$ αρα αλλαγει $\dfrac{\log \epsilon}{\log|z|} > 0$

το ν_0 εξαρτάται απο το z

Αν αλλάξω το z θα αλλάξει το ν_0

Ομοιόμορφη σύγκλιση: $f_\nu \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow |f_\nu(z) - f(z)| < \epsilon\ (\forall z \in Z)$

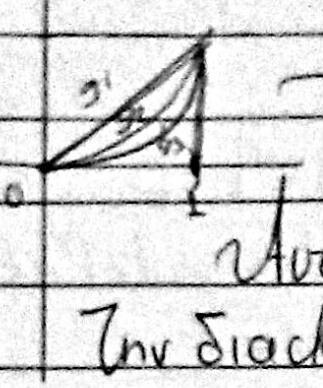
Αν f_ν συγκλινει ομοιομορφα $\Rightarrow$ η f συγκλινει κατα σημειο

$\not\Leftarrow$ (δεν ισχυει)

← πραγματική / όχι μιγαδική

Πχ $g(x)=x^v$

$g_v \xrightarrow{\sigma\eta\mu} g : g(x)=0,\ x\in[0,1)$



→ Εξήγησε με σχήματα την ~~...~~ συγκλιση και την ομοιομορφη

συγκλίνει

Αυτή δεν ~~...~~ ομοιομορφα

Την διαφορα τους εξήγησε

→ κατα σημειο

1) $f_v \xrightarrow{\sigma\eta\mu} f :\iff f_v(z)$ βασική δηλαδή:

$(\forall z\in Z)(\forall \epsilon>0)(\exists v_0)\ v,\mu\geq v_0 \Rightarrow |f_v(z)-f_\mu(z)|<\epsilon$

Εαν $v=\mu+k$: $(\forall z\in Z)(\forall \epsilon>0)(\exists v_0)\ \mu\geq v_0$ κ' $k\in\mathbb{N} \to$

$|f_{\mu+k}(z)-f_\mu(z)|<\epsilon$.

2) $f_v \xrightarrow{o\mu} f :\iff f_v$ βασική ομοιομορφα.

$(\forall \epsilon>0)(\exists v_0):(\forall \mu\geq v_0)(\forall k\in\mathbb{N})(\forall z\in Z)\ |f_{\mu+k}(z)-f_\mu(z)|<\epsilon$

Ορίζω $S_1=f_1$

$S_2=f_1+f_2$

$S_3=f_1+f_2+f_3$

⋮

Ακολουθία συναρτήσεων $S_v=f_1+f_2+\dots+f_v$

⋮

Η $S_v \xrightarrow{\sigma\eta\mu\varepsilon\iota\alpha} S$ ή $S_v \xrightarrow{o\mu} S=\sum_{v=1}^{\infty} f_v(z)$

$S(z)=\sum_{v=1}^{\infty} f_v(z)$

$\boxed{\text{Σειρα}}$

$|f(z)| \leq * *$

Μια σειρα Σf_ν μπορει να συγκλινει ειτε κατα σημειο ειτε ομοιομορφα.

Εαν συγκλινει κατα σημειο $S_\nu \xrightarrow{\text{σημ}} S$: $(\forall z \in Z)(\forall \epsilon > 0)$
$(\exists \nu_0)(\forall \mu \geq \nu_0)(\forall k \in \mathbb{N})$: $|S_{\mu+k}(z) - S_k(z)| < \epsilon$
$|(f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_\mu(z) + f_{\mu+1}(z) + \dots + f_{\mu+k}(z)) -$
$- (f_1(z) + \dots + f_\mu(z))| < \epsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_{\mu+1}(z) + \dots + f_{\mu+k}(z)| < \epsilon \Rightarrow |\sum_{\mu+1}^{\mu+k} f_j(z)| < \epsilon$

$\rightarrow$ Σf_ν συγκλινει κατα σημειο
$(\forall z \in Z)(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)(\forall \mu \geq \nu_0)(\forall k \in \mathbb{N}) \Rightarrow |\sum_{j=\mu+1}^{\mu+k} f_j(z)| < \epsilon$

$\rightarrow$ Σf_ν συγκλινει ομοιομορφα:
$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)(\forall \mu \geq \nu_0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall z \in Z)$ $|\sum_{j=\mu+1}^{\mu+k} f_j(z)| < \epsilon$
$\uparrow$ κριτηριο του Cauchy

Εστω οτι οι οροι της σειρας ικανοποιουν: $|f_\nu(z)| \leq M$
$\forall z \in Z$, $\forall \nu$ και $\Sigma M_\nu < +\infty$. Τοτε $\Rightarrow$ Σf_ν συγκλινει ομοιομορφα

Αποδειξη:
γιατι $\Sigma M_\nu < +\infty$
$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)\ \mu \geq \nu_0$ κ' $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j=\mu+1}^{\mu+k} M_j < \epsilon$ $|\sum_{j=\mu+1}^{\mu+k} f_j(z)| \leq$

$\leq \sum_{j=\mu+1}^{\mu+k} |f_j(z)| \leq \sum_{j=\mu+1}^{\mu+k} M_j < \epsilon$

γιατι παπαχει και...

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} z^\nu = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$S_\nu = 1 + z + z^2 + \cdots + z^\nu$ (ακολουθια μερικων αθροισματων)

$$= \frac{z^\nu \cdot z - 1}{z-1} = \frac{z^{\nu+1} - 1}{z-1} \longrightarrow \frac{1}{1-z}$$

{Οταν παω να βρω το οριο, πρεπει να παω να δω τι γινεται με το $z^{\nu+1}$ γιατι αυτο μεταβαλλεται}

$z^{\nu+1}$ 1) εαν $|z|<1 \Rightarrow z^\nu \to 0$

Αρα $\sum_{\nu=0}^{+\infty} z^\nu = \frac{1}{1-z}$, αυτο ομως δεν συγκλινει ομοιομορφα:

Εστω οτι συγκλινει ομοιομορφα:

$\varepsilon < 1$: $|z^\nu| < \varepsilon$ $\nu \geq \nu_0$

$z_0 = \varepsilon^{\frac{1}{\nu_0+1}}$ $|z_0| < 1$

Αλλα $|z_0^\nu| = \varepsilon^{\frac{\nu_0}{\nu_0+1}} > \varepsilon$: $\varepsilon^{\nu_0} > \varepsilon^{\nu_0+1} \Rightarrow$

Αρα βρηκα ενα z_0 που δεν επαληθευει τον τυπο αρα δεν συγκλινει ομοιομορφα